African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)
Online ISSN: 2957-644X
Volume 4, Issue 3, 2025
Page No: 93-99
Website: https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index
ISI 2025: 1.126 SJIFactor 2024: 6.752 معامل التأثير العربي: 1.62

المصفوفات الضبابية وبعض خواصها الجبرية

فاطمة المبروك سليمان [1]، زينب أحمد خليفة زوليه [2*]
[1] قسم الرياضيات، كلية العلوم غريان، جامعة غريان، ليبيا
[2] قسم الرياضيات، كلية العلوم الأصابعة، جامعة غريان، ليبيا

Fuzzy Matrices and Some of Their Algebraic Properties

Fatema Mabrok Soleman [1], Zaynab Ahmed Khalleefah [2*]
[1] Department of Mathematics, Faculty of Science, Gharyan, University of Gharyan, Libya
[2] Department of Mathematics, Faculty of Science, Alasabaa, University of Gharyan, Libya

*Corresponding author: zaynab.zuwaliyah@gu.edu.ly, Fatima.soliman@gu.edu.ly

Received: May 24, 2025	Accepted: July 22, 2025	Published: July 26, 2025

الملخص:
تهدف هذه الورقة إلى استعراض مفهوم المصفوفات الضبابية وبعض خواصها الجبرية الأساسية .تم تعريف المصفوفة الضبابية كتعميم للمصفوفات التقليدية، حيث تكون عناصرها قيمًا ضبابية تعبر عن درجات الانتماء بدلًا من القيم الثنائية (0 أو 1) .تتناول هذه الورقة بعض العمليات الجبرية على المصفوفات الضبابية مثل الجمع والضرب تحت الجبر الضبابي max-min، والمصفوفة الصفرية ومصفوفة الوحدة، بالإضافة إلى بعض الخصائص الجبرية المتعلقة بها .تبرز أهمية المصفوفات الضبابية في نمذجة الأنظمة التي تحتوي على عدم يقين أو غموض وتطبيقاتها في مجالات متنوعة مثل الذكاء الاصطناعي ونظم التحكم ومعالجة الصور وغيرها.

الكلمات المفتاحية :المصفوفات، الضبابية، الجبر الضبابي.

Abstract:
This paper aims to review the concept of fuzzy matrices and some of their fundamental algebraic properties. A fuzzy matrix is defined as a generalization of conventional matrices, where its elements are fuzzy values representing degrees of membership instead of binary values (0 or 1). The paper addresses several algebraic operations on fuzzy matrices, such as addition and multiplication under fuzzy max-min algebra, the zero matrix, and the identity matrix, in addition to some related algebraic properties. The significance of fuzzy matrices is highlighted in modeling systems characterized by uncertainty or ambiguity, with applications in various fields such as artificial intelligence, control systems, image processing, and others.

Keywords: Matrix, Fuzzy, Fuzzy Algebra.

المقدمة:

المصفوفات الضبابية تعتبر امتدادًا لنظرية المجموعات الضبابية التي نشأت على يد العالم لطفي زادة (zadah) في عام 1965 حيث أن النماذج الرياضية الكلاسيكية التي تعتمد على القيم الثنائية (صح / الخطأ أو 0/1) لا تكفي لوصف الظواهر المعقدة بدقة، هنا تبرز أهمية المنطق الضبابي والمجموعات الضبابية التي تسمح بتمثيل درجات الانتماء الجزئية مما يوفر مرونة أكبر في التعامل مع المعلومات غير الدقيقة.
تم تعريف المصفوفة الضبابية لأول مرة في عام 1977 من قبل الباحث تومسون (Thomson) الذي ناقش تقارب قوى المصفوفة الضبابية، ولها تطبيقات واسعة في مجالات متعددة بما في ذلك الذكاء الاصطناعي، وتحليل الشبكات، ومعالجة الصور... إلخ.

تعريف Fuzzy Algebra (A. R Meenaks، 2019):

الجبر الضبابي هو نظام رياضي $(\mathscr{F}, +, \cdot)$ يحتوي على عمليتين ثنائيتين " + " و" ." ويحقق الخصائص التالية: التبديل، التماثل، التنسيق، عدم النمو أو الامتصاص، توزيع الضرب على الجمع، والجمع على الضرب، المحايد الضربي والجمعي، ومن أمثلة الجبر الضبابي جبرMax-min الضبابي حيث يكون

$a + b = \max(a, b)$ و $a.b = \min(a, b)$ لكل $a, b \in \mathcal{F}$.

تعريف Fuzzy set:

المجموعة الضبابية A هي المجموعة التي عناصرها تنتمي إليها بدرجات مختلفة وهذه الدرجات (memberships) يرمز لها بالرمز (μ) تكون ضمن الفترة المغلقة [0,1] وتكتب المجموعة الضبابية بشكل مجموعات ثنائية، المركبة الأولى هي العنصر والثانية هي درجة الانتماء:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, 0 \leq \mu_A(x) \leq 1\}$$

حيث

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

عندما

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & if\ x \in A \\ 0 & if\ \notin A \\ 0 < \mu_A(x) < 1 & otherwise \end{cases}$$

تعريف Fuzzy Matrix (M.pal, 2016):

المصفوفة الضبابية A من الرتبة $m \times n$ على المجال$\mathscr{F}$ والتي عناصرها أعداد ضبابية تعرف بـ $A = [a_{ij}, a_{ij\mu}]_{m \times n}$ حيث $a_{ij\mu}$ هي درجة العضوية للعنصر a_{ij} في المصفوفة A وللتبسيط تكتب A بالشكل التالي:

$$A = [a_{ij\mu}]_{m \times n}, a_{ij\mu} \in [0,1]$$

توجد عدة أنواع من المصفوفات الضبابية منها:

1) المصفوفة الضبابية المربعة وهي مصفوفة ضبابية يكون فيها عدد الصفوف مساويًا لعدد الأعمدة $(m = n)$.
2) المصفوفة الضبابية المتماثلة وهي مصفوفة ضبابية مربعة تكون فيها$a_{ij} = a_{ij}$ لكل $j,i \in N$.
3) المصفوفة الضبابية الصفرية وهي مصفوفة ضبابية جميع عناصرها تساوي صفر.
4) مصفوفة الوحدة الضبابية وهي مصفوفة ضبابية مربعة تكون عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 وباقي العناصر تساوي 0 يرمز لها بالرمز I_n.

تعريف:

لأي مصفوفتين ضبابيتين

$$A = [a_{ij}]_{nxn}, B = [b_{ij}]_{nxp}, C = [c_{ij}]_{nxp}$$

يتم تعريف العمليات الأتية:

1) $B + C = [b_{ij} + c_{ij}]$

حيث

$$b_{ij} + c_{ij} = \max(b_{ij}, c_{ij})$$

2) $A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

حيث

$$a_{ik} \cdot b_{kj} = \min(a_{ik}, b_{kj})$$
$$\therefore A \cdot B = \max[min(a_{ik}, b_{kj})]$$

3) $A^t = [a_{ji}]$

وتسمى محورة المصفوفة الضبابية A.

4) $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$, $\mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A}^k \cdot \mathrm{A}, \mathrm{k} = 0,1,2, \dots \mathrm{n}$

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

مصفوفتين ضبابيتين فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.9 \\ 1 & 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

مثال: إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفتين ضبابيتين فإن

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} [0.6 \quad 0.5] \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} & [0.6 \quad 0.5] \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [0.1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} & [0.1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max [\min(0.6,0.4), (\min(0.5,0.2)] & \max [\min(0.6,0.8), (\min(0.5,1)] \\ \max [\min(0.1,0.4), (\min(0,0.2)] & \max [\min(0.1,0.8), (\min(0,1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

خواص جمع وضرب المصفوفات الضبابية:

لأي ثلاث مصفوفات ضبابية A و B و C يكون

1) $A + B = B + A.$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C.$
3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$
4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$
5) $A + 0 = 0 + A = A.$
6) $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0.$
7) $A \cdot I = I \cdot A = A$

ملاحظة: ضرب المصفوفات ليس عملية تبدليه أي أن $AB \neq BA$ أيضًا $AB = 0$ لا يعني بالضرورة أن $A = 0$ أو $B = 0$ كما في حالة المصفوفات الكلاسيكية.

مثلًا إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$AB = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$
$$AB \neq BA$$

مثال: إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.9 & 0.2 \end{bmatrix} \neq 0$$

فإن

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA \neq 0$$

طرح المصفوفات الضبابية:

لأي مصفوفتين ضبابيتين من نفس الرتبة فإن عملية الطرح تعرف بالآتي:

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

حيث

$$a - b = \begin{cases} a & if \quad a > b \\ 0 & if \quad a \leq b \end{cases}$$

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 \\ 1 & 0.5 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

خواص طرح المصفوفات الضبابية:

1) $A - B \neq B - A$
2) $A - 0 = A$
3) $0 - A = 0$
4) $A - A = 0$

تعريف:
لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة ضبابية من الرتبة $n \times n$ يقال إن المصفوفة الضبابية A:
1) متماثلة (*symmetric*) إذا كان $A = A^t$.
2) انعكاسية (*reflexive*) إذا كانت $A \geq I_n$.
3) متعدية (*transitive*) إذا كانت $A^2 \leq A$.
4) متشابهة إذا كانت متماثلة وانعكاسية ومتعددة.
5) جامدة (*idempotent*) إذا كانت $A^2 = A$.
6) ثابتة (*constant*) إذا كانت $a_{ik} = a_{jk}$ لكل $i,j,k \in n$.
7) مكملة المصفوفة $A^c = [1 - a_{ij}]$ حيث عملية الطرح هنا هي طرح كلاسيكي.

تعريف:
لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة ضبابية من الرتبة $n \times n$ تكون مصفوفة مثلثية سفلية (علوية) إذا كانت $a_{ij} = 0$ لكل $i < j$ $(i > j)$.

تعريف:
المصفوفة المربعة A تسمي مصفوفة تقليب (*permutation*) إذا كان كل عمود وكل صف يحتوي على 1 وباقي المدخلات الأخرى أصفار مثل:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أثر المصفوفة الضبابية Traces of fuzzy matrix (2019,G. Claye):
أثر المصفوفة الضبابية المربعة A من الرتبة $n \times n$ تعطي بالعلاقة:

$$T_r\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \max(a_{11}, a_{22}, \dots . a_{nn})$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$T_r\, A = \max(0.7, 0.4, 0.5) = 0.7$$

نظرية:

ليكن A, B مصفوفتين ضبابيتين من الرتبة $n \times n$ وليكن λ عدد حقيقي بحيث $\lambda \in [0,1]$ فإن

1) $T_r(A) + T_r(B) = T_r(A + B)$
2) $T_r(A) = T_r(A^T)$
3) $T_r(\lambda A) = \lambda T_r(A)$

محددات المصفوفات الضبابية المربعة Determinants of Square fuzzy matrices (2019,G. Claye):

تعريف:

يعرف المحدد $|A|$ لمصفوفة ضبابية A من الرتبة $n \times n$ بأنه

$$|A| = \det(A) = \sum_{\delta \epsilon s_n} a_{1\delta(1)} \quad a_{2\delta(2)} \ \dots a_{n\delta(n)}$$

حيث S_n تشير إلى المجموعة المتماثلة لجميع تبديلات الأدلة $(1,2 = n)$

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$|A| = max[\min(0.5,1)\ , \min(0.7,0.1)] = \max(0.5,0.1) = 0.5$$

مثال: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.9 & 0.7 \\ 1 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 0 \begin{bmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= 0[\min(0.9,0.4) + \min(0.7,0.3)] + 0.1\ [\min(0.25,0.4) + \min(0.7,1)]$$
$$+ 0.5[\min(0.2,0.3) + \min(0.9,0.1)] = 0(0.4) + 0.1(0.7) + 0.5(0.2)$$
$$= 0 + 0.1 + 0.2 = 0.2$$

ملاحظة: في المصفوفات الكلاسيكية نجد أن $|AB| = |B|\ |A|$ ولكن هذا ليس دائما صحيح بالنسبة للمصفوفات الضبابية.

مثلًا: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.9 & 0.4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$|A| = 0.4\ , |B| = 0.2\ , |AB| = 0.4$$
$$|A|\ |B| = 0.2$$
$$\therefore |A|\ |B| \neq |AB|$$

خواص المحددات:

1) إذا كانت $A = [a_{ij}]$ أي مصفوفة ضبابية مربعة (من الرتبة $n \times n$) وكانت A^t محورتها فإن

$$|A| = |A^t|$$

2) إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة ضبابية مثلثية من الرتبة $n \times n$ فإن

$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} \dots a_{nn}$$

3) لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة ضبابية من الرتبة $n \times n$ فإن:

أ- إذا تم الحصول على مصفوفة ضبابية B بضرب أي صف أو عمود من A في العدد K حيث $K \in [0,1]$ فإن

$$K|A| = |B|$$

ب- إذا كانت A تحتوي على صف أو عمود صفري فإن

$$|A| = 0$$

مرافق المصفوفة الضبابية المربعة Adjoint of a square fuzzy Matrix (2019,G. Claye):

تعريف:
يشار إلى المصفوفة المرافقة لمصفوفة ضبابية A من الرتبة $n \times n$ بـ $adjA$ وتعرف $b_{ij} = |A_{ji}|$ حيث $|A_{ji}|$ هو محدد المصفوفة ضبابية من الرتبة $(n-1) \times (n-1)$ المتكونة بحذف الصف j والعمود i من المصفوفة A حيث $B = adjA$

نظرية:
لأي مصفوفتين ضبابيتين A و B من الرتبة $n \times n$ يكون لدينا
1) $A \le \mathrm{B}$ فإن $adjA \ \le adjB$
2) $adj\ A + adj\ B \ \le adj(A + \mathrm{B})$
3) $adj\ A^t = (adjA)^t$

نظرية:
إذا كانت $A = [a_{ij}]$ أي مصفوفة ضبابية من الرتبة $n \times n$ فإن:
1) $A\ adj\ A \ge |A|\ \ I_n$
2) $(adj\ A)A \ge |A|\ \ I_n$
3) إذا كانت A تحتوي على صف صفري فإن $(adjA)A = 0$ أي يعطي المصفوفة الصفرية.

مثال:
إذا كانت لدينا المصفوفة

$$A = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 & 0.9 \end{vmatrix}$$

فإن مصفوفة المرافقات C_{ij} نحصل عليها كالآتي:
العنصر الأول C_{11} نحصل عليه بإيجاد المحدد بعد حذف الصف الأول والعمود الأول وهكذا بقية العناصر.

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.4 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.8$$

$$C_{12} = \begin{vmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.3$$

وهكذا

$$C_{13} = 0.6, C_{21} = 0.7, C_{22} = 0.5, C_{23} = 0.6, C_{31} = 0.5, C_{32} = 0.2,$$
$$C_{33} = 0.2$$

وبذلك تكون مصفوفة المرفقات هي:

$$adjA = C = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 & 0.2 \end{vmatrix}$$

ومحورتها

$$adjA^t = C^T = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.7 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.6 & 0.2 \end{vmatrix}$$

الخلاصة:
قدمت هذه الورقة استعراضًا شاملًا لمفهوم المصفوفات الضبابية وبعض خواصها الجبرية الأساسية. تم توضيح كيفية تعريف المصفوفات الضبابية كتعميم للمصفوفات التقليدية بعناصر تعبر عن درجات الانتماء، إضافة إلى استعراض العمليات الجبرية الأساسية عليها مثل الجمع والضرب تحت الجبر الضبابيmax-min ، والمصفوفة الصفرية، ومصفوفة الوحدة. كما تم تسليط الضوء على نشأة المصفوفات الضبابية وأهميتها البالغة في نمذجة الأنظمة المعقدة التي تتسم بالغموض وعدم اليقين.
إن التطور المستمر في نظرية المصفوفات الضبابية يفتح آفاقًا جديدة للبحث والتطبيق في مجالات متنوعة. فإلى جانب تطبيقاتها الحالية في الذكاء الاصطناعي، ونظم التحكم، ومعالجة الصور، يمكن للمصفوفات الضبابية أن تلعب دورًا محوريًا

في تحليل البيانات غير الدقيقة، واتخاذ القرارات في ظل الظروف الغامضة، وتصميم أنظمة أكثر مرونة وذكاءً. هذا يعزز قدرتنا على التعامل مع التحديات المعقدة في العالم الحقيقي ويساهم في تطوير حلول مبتكرة للعديد من المشكلات المعاصرة.

References

[1] K. H. Kim and F. W. Roush, "Generalized Fuzzy Matrices," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. U, pp. 293-315, 1980.

[2] A. R. Meenakshi, *Fuzzy Matrix, Theory and Application*. Chennai: MJP Publishers, 2008.

[3] M. Pal, "Fuzzy Matrix and Its Application," Vidyasagar University, West Bengal-721102, India, 2016, pp. Pl-11.

[4] G. Claye, "Some Results on Fuzzy Matrices," Georgia College, Milledgeville, GA 31061, 2019.

[5] A. R. Meenaks, *Fuzzy Matrix: Theory and Applications*. Karpayam University, 2019.