AJAPAS

African Journal of Advanced Pure and Applied Sciences (AJAPAS)

Online ISSN: 2957-644X
Volume 5, Issue 1, 2026
Page No: 400-416
Website: https://aaasjournals.com/index.php/ajapas/index

ISI 2025: 1.126 SJIFactor 2024: 6.752 معامل التأثير العربي: 1.62

Gamma Function: An Analytical Study of Integral Properties and Asymptotic Expansions

Ali Abushnaf Ali *
General Department, Higher Institute of Engineering Technologies, Beni Walid, Libya

دالة جاما: دراسة تحليلية في الخصائص التكاملية والتوسعات التقاربية

علي أبو شناف علي *
القسم العام، المعهد العالي للتقنيات الهندسية، بني وليد، ليبيا

*Corresponding author: alibra2071@gmail.com

Received: December 14, 2025	Accepted: February 28, 2026	Published: March 12, 2026

Abstract

The Gamma function Γ(z) is addressed as one of the most important special functions in complex analysis and mathematical physics. The aim of the research is to provide a comprehensive exposition that links integral representations with analytic continuation across the complex plane. Emphasis is placed on Poincaré-type asymptotic expansions and Stirling's formula, and the study is supported by numerical analysis using Python to compute large values of the Gamma function. The investigation concludes that logarithmic convexity and Hankel's contour representation constitute the most rigorous tools for guaranteeing the uniqueness and continuity of the function away from its simple poles.

Keywords: Gamma function , Asymptotic Expansion , Polygamma Function. Analytic Continuation; Integral Representation.

الملخص

تتناول دالة جاما Γz كواحدة من أهم الدوال الخاصة في التحليل المركب والفيزياء الرياضية ، بهدف البحث تقديم عرض شامل يربط بين التمثيلات التكاملية والامتداد التحليلي عبر المستوى العقدي ، لقد تم التركيز على التوسعات التقاربية من نوع بوانكاريه وصيغة سترلينج ، مع دعم الدراسة بتحليل عددي باستخدام البايثون Python لإيجاد قيم كبيرة لدالة جاما، وتتلخص الدراسة الى أن المحدبية اللوغاريتمية والتمثيل الكنتوري لهانكل يمثلان الأدوات الأكثر صرامة لضمان وحدانية واستمرارية الدالة بعيدا عن أقطابها البسيطة .

الكلمات المفتاحية: دالة جاما، التوسع التقاربي ، دالة بوليجاما ، الاستمرار التحليلي ، التمثيل التكاملي.

1.مقدمة :-

في القرن الثامن عشر اهتم ليونهارد اويلر Leonhard Euler (1783-1770) بمشكلة الاستيفاء **interpolation** بين الأرقام الصحيحة $n = 0,1,2,3,\ldots$ الى القيم غير الصحيحة ل n . وقد قادته هذه المشكلة في عام 1729 الى اكتشاف دالة جاما Gamma function الشهيرة , وهي تعميم لدالة المضروب factorial التي تعطي معنى ل $x!$ عندما يكون x أي عدد موجب , ويمكن تمديد هذه النتيجة لتشمل بعض الأعداد السالبة وحتى الأعداد العقدية ,

الرمز Γx الذي يستخدم الآن على نطاق واسع للدالة جاما لم يكن من ابتكار اويلر , بل تم تقديمه في عام 1809 بواسطة ليجندر Legender (1752-1833) الذي وضع صيغة التكرار المزدوجة duplication formula لدالة جاما بعد حوالي 150 عاما من اكتشاف اويلر , لقد تم توسيع النظرية المتعلقة بدالة جاما بشكل كبير من خلال نظرية الدوال التامة entire functionالتي طورها العالم وايرستراس Weierstrass(1815-1897) .

بعد حوالي ثلاثة وأربعين عاما من اكتشافه لدالة جاما , اكتشف اويلر دالة بيتا هي في الواقع تركيبة خاصة من دوال دوال جاما . يؤدي المشتق اللوغارتيمي لدالة جاما الى دالة ديجاما (digamma) بينما يؤدي المزيد من الاشتقاقات الى عائلة من دوال بوليجاما polygamma والتي ترتبط جمعيها بدوال زيتا ريمان (1826-1866) . [1]

مشكلة البحث :- كيف يمكن بناء عرض تحليلي متكامل لدالة جاما يربط بين تمثيلاتها التكاملية وامتدادها التحليلي وبنيتها الميرومورفية وتوسعاتها التقاربية مع ابراز تطبيقاتها في الفيزياء الرياضية بصورة منهجية مترابطة .

أهداف البحث :-
يهدف هذا البحث إلى دراسة البنية التحليلية لدالة جاما من خلال تمثيلاتها التكاملية وتوسعاتها التقاربية، مع تحليل دوال ديجاما وبوليجاما، وبيان تطبيقاتها في الفيزياء الرياضية، خصوصًا في التنظيم البعدي ضمن نظرية الحقول الكمومية.
يتناول هذا البحث دراسة تحليلية معممة لدالة جاما من خلال عدة مباحث رئيسية مرتبطة ، ويمكن إيجازها في ما يلي :-

المبحث الأول يتناول التعاريف الأساسية والتمثيلات التكاملية ويستعرض هذا الجزء صور الدالة المختلفة من تكامل اويلر الكلاسيكي وشروط تقاربيه وصولا الى التمثيلات البديلة كالتمثيل اللوغاريتمي والتربيعي , اما المبحث الثاني فقد درس بعض العلاقات التي تحقق دالة جاما مثل صيغة التكرار ودورها في الاستمرار التحليلي ، اما المبحث الثالث تناول البنية الميرومورفية والبواقي و درس دراسة الأقطاب البسيطة للدالة عند الاعداد الصحيحة السالبة وحساب البواقي رياضيا مع ربط هذه النتائج بتطبيقات فزيائية مثل التنظيم البعدي في ميكانيكا الكم وتحويلات لابلاس .
المبحث الرابع درس تمثيل هانكل الكنتوري وتناول كيفية تجاوز قيود التكاملات الحقيقة ، اما المبحث الخامس درس المشتقات اللوغاريتمية وتناول دراسة عائلة بوليجاما (ديجاما وترايجاما) من خلال مشتقات دالة جاما , اما المبحث السادس يدرس التوسعات التقاربية التي تكتسب أهمية قصوى عند التعامل مع القيم الضخمة للمتغير .

2.تعاريف :-

2-1.التعريف الأول :-التمثيلات التكاملية لدالة جاما Integral Representations of the gamma function :-

2-1-1.التمثيل الكلاسيكي (تكامل اويلر The Euler integral) :-

دالة جاما Γx هي تعميم لدالة المضروب factorial على الاعداد المركبة وتعرف تكامليا على النحو الآتي

$$\Gamma z = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \mathcal{R}\mathrm{e}(Z) > 0 \ , z \in \mathbb{C}$$

شرط تقارب دالة جاما :- تكامل دالة جاما يكون متقاربا اذا كانت $\Re(z) > 0$ ويعطي دالة تحليلية في نصف المستوى والدالة $t^{z-1}e^{-t}$ سلوكها مناسب عند طرفي التكامل 0 , ∞, لندرس التقارب عند طرفي التكامل .

1-عند المالانهاية $t \to \infty$ يكون السلوك المسيطر للدالة هو العامل الاسي e^{-t} الذي يضمن التقارب والذي يتناقص بسرعة فائقة وهذا التناقص يتغلب على أي نمو متعدد الحدود ناتج عن t^{z-1} وبذلك يكون

$\lim_{t\to\infty} e^{-t} t^{z-1} = 0$ لكل $z \in \mathbb{C}$ و بالتالي لايشكل الحد الأعلى أي مشكلة في التقارب .

2بالقرب عند الحد الأدنى للتكامل $t \to 0$ يكون $e^{-t} \approx 1$ ومن تم إذا كان هذا التقريب جيدا بين $t = 0$ و$t = c$ (حيث $c > 0$ وقيمة صغيرة جدا) ,يمكننا كتابة تكامل جاما على النحو التالي :-

و $\Gamma z \approx \int_0^c t^{z-1}\, dt + \int_c^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$ ولحل التكامل الأول

$$\int_0^c t^{x-1} dt = [\tfrac{1}{z} t^z]_0^c = \tfrac{1}{z}(c^z - 0^z)$$

لكي يظل الحد الأول موجودا عند الحد الأدني (أي عند $t = 0$) , يجب أن يكون $\lim_{t\to 0^+} t^z$ موجودة وهذا يتحقق فقط عندما $x > 0$.

إذا كان $z \le 0$ فإن t^z يؤول الى المالانهاية عندما t تؤول إلى الصفر مما يجعل التكامل متباعدا عند الحد الأدنى .[2]
نستنتج أن شرط $z > 0$ هو شرط ضروري لضمان تقارب تكامل دالة جاما عند الحد الأدنى , وفي المقابل يظهر التكامل تقاربا مطلقا عند حده الأعلى $(t \to \infty)$ لجميع قيم z الحقيقية , وذلك بسبب السيطرة الأسية للعامل e^{-t} التي تضبط نمو t^{z-1} وتضمن أختفاء نهايته عند المالانهاية .
وبالتالي تعريف مجال دالة جاما بواسطة هذا التكامل يقتصر على القيم الحقيقية الموجبة للمتغير المركب z .

2-1-2. التمثيل عبر تغيير المتغير (التمثيل اللوغاريتمي) :- التكامل الآتي والذي يعرف بالصورة الاتية

$$\int_0^1 (\ln(\tfrac{1}{t}))^{z-1}\, dt \qquad (2)$$

هذا التكامل من الصيغ غير التقليدية لتعريف دالة جاما , وقد ورد لأول مرة في مراسلات اويلر Euler مع غولدباخ Goldbach في مطلع 1730 , وهذا التكامل يتقارب من اجل $z > 0$ ويظهر خصائص تحليلية جعلته لاحقا أساسا لتعريف دالة جاما في سياقات متعددة .

باستخدام التعويض $\tau = -lnt$ مما يعني أن $t = e^{-\tau}$ و $dt = -e^{-\tau}d\tau$, ويمكن تحويل التعريف الأصلي إلى الصيغة القياسية الأكثر استخداما في التطبيقات $\Gamma z = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt$.[3]

3-1-2. التمثيل عبر التكامل الجاوسي (الشكل التربيعي) :- يعد التمثيل التربيعي لدالة جاما الذي يعتبر أحد الصيغ التكاملية البديلة التي تبرز العلاقة العميقة بين دالة جاما والتكاملات الجاوسية , ويعطى هذا التكامل بالصورة التالية

$$\Gamma z = 2\int_0^\infty t^{2z-1}e^{-t^2}\, dt \quad , \Re e(z) > 0 \qquad (3)$$

ينتج هذا التمثيل عن تطبيق تغيير متغير مناسب في التكامل الكلاسيكي لدالة جاما

نعوض $t = u^2$ مما يؤدي الى

$$\Gamma z = \int_0^\infty (u^2)^{z-1}\, e^{-u^2} 2u\, du = 2\int_0^\infty u^{2z-1}e^{-u^2}\, du = 2\int_0^\infty t^{2t-1}e^{-t^2}dt.\ \Re e(z) > 0, z \in \mathbb{C}$$

وسمى بالتمثيل التربيعي لأن الاس في الدالة الاسية اصبح تربيعي , وأهميته يستخدم في إيجاد بعض القيم الخاصة مثل

$$\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

ويعد أساسيا في تحليل التوزيع الطبيعي حيث يظهر في دوال الكثافة الاحتمالية .[4]

2-2.التعريف الثاني:- صيغة جاوس لدالة جاما :-

من بين الصيغ البارزة لدالة جاما تعريف جاوس الذي يعرف بالصيغة التالية

$$\Gamma z = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)(z+3)\ldots\ldots(z+n)} \qquad (4)$$

ويعد من أكثر الصيغ دقة و وضوحا في تعميم المضروب وهذا التعريف لا يقتصر على القيم الموجبة للمتغير z فقط , ولكنه يمتد الى القيم الآخرى عدا الصفر والاعداد الصحيحة السالبة .

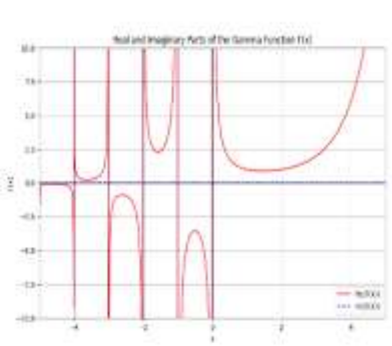
إن تعريف جاوس والمعروف أيضا باسم صيغة جاوس اللانهائية مهم للغاية لأنه يسمح لنا بتمديد دالة جاما الى كامل المستوى المركب باستثناء الأقطاب (poles) البسيطة عند الاعداد الصحيحة السالبة 0,-1,-2,-3,

وقد سمح هذا التعريف بتعريف دالة جاما لقيم z السالبة غير الصحيحة مثل$\Gamma(-0.5)$,

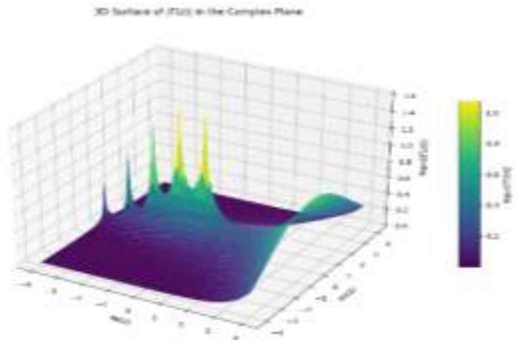
تتميز هذه الصيغة بعدم اعتمادها على التكامل مما يجعلها مناسبة في بعض السياقات التحليلية والعددية كما يستخدم في اثبات الاستمرار التحليلي لدالة جاما الى المجال المركب . ونستطيع أثبات العديد من الصيغ لدالة جاما بواسطتها مثل صيغة الانعكاس وصيغة وايرشتراس للضرب اللانهائي وغيرها . [1] [5]

وخلاصة ما سبق ان صيغة جاوس تمثل شكلا من اشكال الامتداد التحليلي لدالة جاما الى نطاق أوسع من $\Re e(z) > 0$.

الفرق بين صيغة اويلر للتكامل وصيغة جاوس :- تعريف اويلر للتكامل يعرف دالة جاما كدالة تحليلية فقط في المجال $\Re(z) > 0$ لأنه يتقارب على هذه الفترة ومنحنى الدالة أملس وقابل للاشتقاق ويربط كل عدد عقدي جزءه الحقيقي أكبر من الصفر بمضروبة .أما صيغة جاوس تعتمد على حاصل ضرب في المقام ,وتبقى صحيحة لأي قيم z لا يجعل احد العوامل صفرا , وهذا يعني أن الصيغة تعطي دالة تحليلية analytic على المستوى العقدي باستثناء الأقطاب ......z=0,-1,-2,-3, لذلك هذه الصيغة تعتبر امتدادا تحليليا طبيعيا لتعريف اويلر , لأنها تعطي نفس القيم في المنطقة المشتركة التي يتقاطعان فيها $\Re e(z) > 0$وتبقي معرفة خارج هذه المنطقة أي في المنطقة $\Re e(z) < 0$ عدا الأقطاب .



شكل 1.a دالة جاما   الرسم بواسطة لغة البايثون



شكل 1,bالتمثيل الهندسي ثلاثي الابعاد لدالة جاما

3- بعض العلاقات التي تحقق دالة جاما Some relations satisfied by the gamma function :-

1-3. صيغة التكرار Recurrence formula :- العلاقة التكرارية التي تعرف بالصيغة التالية

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma z \qquad (5)$$

يمكن الحصول عليها أما بتكامل أويلر الكلاسيكي لدالة جاما (1) او بصيغة جاوس (4) ونختار صيغة جاوس لأثباتها

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{z+1}}{z(z+1)(z+2)........(z+n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{n!z^n}{z(z+1)(z+2).......(z+n)}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma z \ \ .then \quad \Gamma z = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \qquad (6)$$

وهذه الصيغة $\Gamma(z+1) = z\Gamma z$ هي الامتداد الطبيعي لخواص المضروب :[6]

$$n! = n(n-1)!$$

$$\Gamma n = (n-1)!\,, \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (7)$$

1-1-3.دور الصيغة التكرارية في الاستمرار التحليلي (*Analytic continuation*) :- الصيغة التكرارية ليست مجرد خاصية هي أداة جوهرية لمد تعريف دالة جاما من نصف المستوى $\Re(z) > 0$ إلى كامل المستوى المركب ماعدا الإعداد الصحيحة السالبة والصفر حيث تظهر اقطاب بسيطة , ويمكن توضيح ذلك .

بما أن الطرف الأيسر الذي سبق تعريفه , وفقا لتعريف اويلر الكلاسيكي (1) بانه امتداد تحليليا للأعداد المركبة عندما $\Re e(z) > 0$. ولكن الطرف الأيمن $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ معرف تعريفا جيدا عندما تكون $z+1 > 0$ ومنها $z > -1$ باستثناء النقطة $z = 0$ التي تمثل قطبا بسيطا *simple pole* للدالة جاما فعندما تقترب z من الصفر تؤول الدالة الى المالانهاية ويمكن توضيح ذلك

$$\lim_{z\to 0} \Gamma z = \lim_{z\to 0} \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\Gamma 1+0}{0}$$

$$Then\ \Gamma z \to \infty$$

وهذا يؤكد ان Γz لها قطبا بسيطا عندما $z = 0$ ومن هنا يمكن توسيع نطاق تعريفها الى النطاق الجديد باستخدام الطرف الأيمن من الصيغة (6) كأساس لعملية الاستمرار التحليلي , ويمكن تفصيل العملية على النحو الآتي :-

أولا بالنسبة للطرف الايسر Γz فقد تم اثبات استمراره التحليلي في النصف $\Re(z) > 0$, وتبقى لدينا الطرف الايسر $\Re(z) < 0$ نقوم بتمديد المجال على النحو التالي :-

يعرف الطرف الأيمن $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ دالة تحليلية في الفترة $-1 < z < 0$ نظرا لان $z+1 > 0$ وبذلك تكون $\Gamma(z+1)$ معرفة ومنتظمة على الفترة $(-1,0)$, وبذلك يمتد تعريف مجال دالة جاما ليمثل توسيعا تحليليا فريدا لنطاق تعريفها الأصلي , أي يمتد إلى $\Re(z) > -1$ تم الى $\Re(z) > -2$, فنحصل على دالة ميرومورفية *Meromorphic function* أي تحليلية على كامل المستوى المركب ما عدا الأقطاب.........*z=0,-1 ,-2,-3* . [2]

2-1-3.نظرية بوهر – مولرب *Bohr-Mollerup theorem*:- تعد دالة جاما الامتداد التحليلي لدالة المضروب،إذ تحقق العلاقة التكرارية الأساسية $\Gamma(z+1) = z\Gamma z$ وهنا يظهر الدور الجوهري لنظرية بوهر -لولرب , إذ قدم بوهر لولرب عام 1922م توصيفا دقيقا يحدد دالة جاما تحديدا وحيدا بين جميع الدوال المعرفة على الفترة $(0, \infty)$.[7].

وتنص النظرية :- لتكن $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ دالة تحقق الشروط الاتية :-

1- الدالة $logf(x)$ دالة محدبة *convex function* 2- المعادلة الدالية $f(x+1) = xf(x)$ لكل $x > 0$

3- شرط المعايرة *normalization condition* $f(1) = 1$ \

البرهان :- نبدأ بملاحظة انه من خلال تطبيق الخاصيتين (2) و (3) بشكل متكرر يمكننا استنتاج علاقة تعميمية لأي عدد صحيح موجب n :

$$f(x+n) = x(x+1) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (x+n-1)f(x) \quad (8)$$

و بما أن العلاقة (8) تربط قيم الدالة f في مجال $(0, \infty)$ بالقيم في الفترة $[0, 1)$ يمكن اثبات أن $f(z) = \Gamma z$ للفترة $0 < z \leq 1$.

1-تطبيق التحدب *convexity application* :- ليكن $0 < z \leq 1$ وليكن n عددا صحيحا بحيث $n \geq 2$.

بما أن $f(z)$ دالة محدبة فأن ميل القواطع المارة بالنقاط المتتالية للدالة $logf(z)$ تتزايد رتيبا ، وعلى وجه الخصوص يمكننا مقارنة ميل القواطع المارة بالنقاط :-

$(n-1, logf(n-1))$ و $(n, logf(n))$ و $(n+1, logf(n+1))$ و $(n+z, logf(n+z))$

$$\frac{logf(n-1)-logf(n)}{(n-1)-n} \leq \frac{logf(z+n)-logf(n)}{(z+n)-n} \leq \frac{logf(n+1)-logf(n)}{(n+1)-n}$$

2- الاستفادة من الخاصية الدالية عند الاعداد الصحيحة :- الخاصية (2) و (3) نجد أن $f(m) = (m-1)!$ لكل عدد صحيح $m \geq 1$ وبالتعويض في المتباينة أعلاه وتبسيط المقامات

$$-\log(n-2)! + \log(n-1)! \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{z} \leq logn! - \log(n-1)!$$

و باستخدام خاصية اللوغاريتم $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\log(n-1) \leq \frac{logf(z+n) - \log(n-1)!}{z} \leq \log(n)$$

بضرب الأطراف في z (بما أن $z > 0$) أذن اتجاه المتباينة لا تتغير

$$zlog(n-1) \leq logf(z+n) - \log((n-1)!) \leq zlog(n)$$

3- إعادة الصياغة الأسية *Exponential Reformulation* :- بإضافة $\log((n-1)!)$ إلى جميع الأطراف وتطبيق الدالة الأسية لأنها دالة متزايدة تماما وتحافظ على المتباينة ونحصل على :-

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(z+n) \leq n^x (n-1)!$$

4- تطبيق العلاقة (8) والحصر النهائي *final squeeze* :- بأستخدام العلاقة (8) نعوض $f(z+n)$ بدلالة $f(z)$

$$t(n-1)^z (n-1)! \leq z(z+1) \ldots \ldots (z+n-1) f(z) \leq n^z (n-1)!$$

بقسمة جميع الأطراف على $z(z+1), , , , , , , (z+n-1)$ نحصل على

$$\frac{z(n-1)^z (n-1)!}{z(z+1) \ldots \ldots (z+n-1)} \leq f(z) \leq \frac{n^z (n-1)!}{z(z+1) \ldots \ldots (z+n-1)}$$

5- نأخذ النهاية *Taking the limit* :- لأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ نستخدم صيغة جاوس *Gauss formula* لدالة جاما والتي تعطى بالصيغة

$$\Gamma z = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2) - - - - (z+n)}$$

يمكن أعادة كتابة طرفي الحصر بدلالة صيغة جاوس عن طريق تعديل الحدود

$$\left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \ldots (z+n)}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{z+n}{n}\right) \leq f(z) \leq \left(\frac{n^z n!}{z(z+1) \ldots (z+n)}\right)\left(\frac{z+n}{n}\right)$$

ونأخذ النهاية عندما $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^z = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z+n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z}{n} + 1\right) = 1$$

بتطبيق *Squeeze theorem* و حيث أن طرفي المتباينة يتناقصان و يتزيدان على التوالي ليقتربا من Γz

$$\Gamma z\ .1.1 \le f(z) \le \Gamma z$$

إذن نستنتج أن $f(z) = \Gamma z$ في الفترة $0 < z \le 1$. وأخيرا باستخدام العلاقة الدالبة (8) تتطابق الدالتان f , Γ على كامل المجال $(0 , \infty)$.

(ا)أهمية مبرهنة بوهر- مولروب *significance of the Bohr Mollerup theorem* :-

تكسب مبرهنة بوهر مولروب أهمية مركزية في التحليل الحقيقي و المركب لعدة أسباب جوهرية :-

1-وصف الوحدانية *uniqueness characterization* **:-**

المعادلة الدالية $f(x + 1) = xf(x)$ مع الشرط $f(1) = 1$ ولايكفى هذا الشرط وحده لتعريف دالة جاما بشكل فريد "حيث توجد دوال دورية يمكن ضربها في الحل للحصول على حلول آخري " .

تضيف المبرهنة شرط التحدب اللوغاريتمي *Log convexity* . كشرط حاسم لضمان وحدانية الدالة Γz كتعميم لدالة المضروب *factorial* .

2-أداة برهانية قوية :- تستخدم المبرهنة كأداة قوية لإثبات متطابقات معقدة تتعلق بدالة جاما مثل (صيغة التضاعف لليجندر و صيغة الانعكاس) بدلا من التعامل مع التكاملات المعقدة . [8]

والأهمية التحليلية لهذه النظرية تظهر أن الصيغة التكاملية ليست ضرورية لتمييز دالة جاما , فالعلاقة التكرارية التي تمثل الامتداد الطبيعي لمفهوم للمضروب مع شرط تحليلي طفيف يتمثل في المحدبية اللوغاريتمية تكفي لتحديد الدالة بشكل وحيد وتلعب المحدبية اللوغاريتمية دورا عميقا في منع سلوك غير منتظم للدالة , وتضمن عدم وجود" تذبذبات " أو" تقلبات " قد تسمح بتشييد امتدادات مختلفة تحقق نفس العلاقة التكرارية .

وبأختصار تمنح المحدبية اللوغاريتمية طبقة من الصرامة التبولوجبة التي تجعل الامتداد وحيدا . [7]

يمكن إيجاد جاما للقيم غير الصحيحة الموجبة بواسطة علاقة التكرار

$$\Gamma\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \Gamma\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

نستنتج أن الصيغة التكرارية ليست مجرد علاقة حسابية بسيطة , بل هي الهيكل المركزي الذي تبنى عليه دالة جاما من حيث التعريف والتحليل المركب والاستمرار والربط بصيغ آخرى .

2-3 .معادلة الانعكاس *Reflection formula* :- تعد معادلة الانعكاس لأويلر من أهم العلاقات التحليلية التي تصف سلوك دالة جاما في المستوى المركب وتعطي بالعلاقة

$$\Gamma z\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{sin\pi z} \qquad (8)$$

وسميت بهذا الاسم لأن $\Gamma z\Gamma(1 - z)$ متماثلة حول المستقيم $\Re e(z) > 0$ على المستوى العقدي ، لأن منتصف المسافة بين z و $1 - z$ هو $\frac{z+(1-z)}{2} = \frac{1}{2}$ ، فمثلا لو أخذنا $z = \frac{1}{3}$ فأن النقطة المقابلة للصيغة $1 - z$ هي $1 - z = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ وهاتان النقطتان متناظرتان حول $\Re e(Z) = \frac{1}{2}$ حتى لو أخذنا اعداد عقدية ، فمثلا $Z_1 = \frac{1}{2} + iy$ فأن النقطة المقابلة $z_2 = \frac{1}{2} - iy$ والنقطتان تكونا انعكاسا حول الخط المستقيم $\Re e(z) = \frac{1}{2}$. **[6]**

3-3. صيغة وايرشتراس للضرب اللانهائي *Weierstrass infinite product form*:-

قام العالم كارل فايرشتراس (1815 -1897) بإعادة صياغة التعريف ، وبذلك وجد الصلة بين العدد جاما والدالة جاما . والعدد جاما المقصود هنا هو ثابت جاما المعروف باسم ثابت اويلر اويلر ماسكروني *Euler Mascheroni constant* وهو عدد شهير في الرياضيات ويرمز له بالرمز "γ "ويسمى بجاما الصغير.[3]

و تعرف الصيغة بالصورة التالية

$$\frac{1}{\Gamma z} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} \qquad (9)$$

و ثابت اويلر يعرف بالصيغة التالية $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \ln n\right) = 0.5772156$

برهان صيغة فابرشتراس :-

نستخدم الدالة $(1-\frac{t}{n})^n$ التي تتقارب الى e^{-t} عندما $n\to\infty$ ويمكن كتابة تكامل جاما على الصورة الاتية

$$\Gamma z = \lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{z-1}(1-\frac{t}{n})^n\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}\int_0^n t^{z-1}(n-t)^n\,dt\ ,\ \Re e(z)>0$$

باستخدام التكامل التجزيء نحصل على

$$\Gamma z = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}\frac{n}{z}\int_0^n t^{z}(n-t)^{n-1}\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}\frac{n(n-1)(n-2).......1}{z(z+1)(z+2)(z+3).....(z+n-1)}\int_0^n t^{z+n-1}\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)\left(\frac{2}{z+2}\right).....(\frac{n}{z+n})$$

وهكذا

$$\frac{1}{\Gamma z} = \lim_{n\to\infty} zn^{-z}\,(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right).....+\left(1+\frac{z}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} zn^{-z}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})$$

ولحساب هذا الحد ندخل عوامل التقارب $e^{-\frac{z}{k}}$ فنحصل على

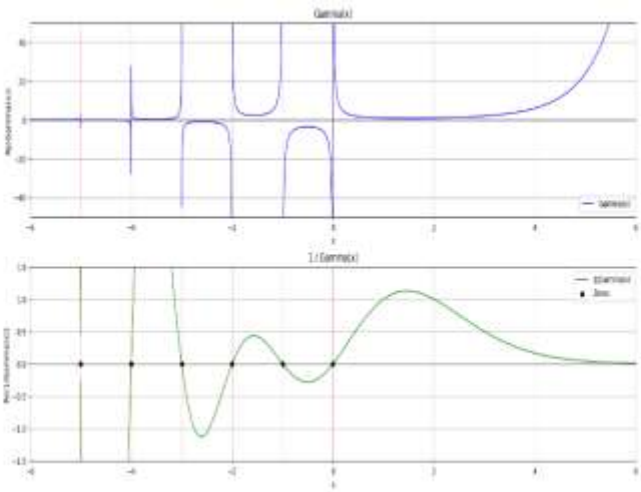
$$\frac{1}{\Gamma z} = \lim_{n\to\infty} zn^{-z(1+\frac{1}{2}-\cdots\frac{1}{n})}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.....\frac{1}{n}-logn)}\left[z\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}\right]$$

و هنا يظهر ثابت اويلر ماسكروني

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}-logn\right) = 0.57721566490183286060512\ ....$$

وبذلك نحصل على صيغة فاشيتراس

$$\frac{1}{\Gamma z} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})\,e^{-\frac{z}{k}}$$



شكل 2. صيغة وايرستراس

3-3-1. الوصف التحليلي والتبولوجي لصيغة وايرستراس :-

An Analytical and Topological Characterization of the Weierstrass Form

تعد صيغة وايرستراس الكائن الرياضي الأكثر شمولا لتعريف دالة جاما في المستوى المركب ، حيث يتم التعامل معها كدالة بناء جدائي مستقل يحدد خصائصها الجوهرية .

1-البنية التحليلية والتقارب المطلق The Analytical Structure and Absolute Convergence :-
تبنى صيغة وايرستراس كجداء لعدد لانهائي من الدوال الأولية ، والسلوك التحليلي هنا يتجاوز مجرد التمثيل يضمن استقرار الدالة في كامل المستوى المركب $\mathbb{C}$ من خلال ادخال عوامل التصحيح الاسية $e^{-\frac{z}{n}}$ التي تتضمن تقارب الجداء حتى عند النقاط البعيدة عن نقطة الأصل .

ويمكن وصف الجداء $ze^{\gamma z}\pi(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$ بانه متقارب تقاربا مطلقا ومنتظما في أي منطقة محدودة من المستوى المركب ، وهذا النوع من التقارب يحول الجداء من مجرد عملية ضرب الى دالة تحليلية كلية Entire Function تمتلك مشتقات من جميع الرتب وبذلك تكون دالة من الصنف C^{∞} .

- رتبة النمو وسلوك المقياس Growth order modulus behavior :-

قي نظرية الدوال الكلية يعد معيار الدالة معيارا لتعقيدها ، وصيغة وايرستراس تمثل دالة من اذنى مراتب التعقيد الممكنة لدالة متسامية .

- الوصف :- تصنف $\frac{1}{\Gamma z}$ كدالة من الرتبة الأولى (order 1) نرمز للرتبة بالرمز $\rho = 1$ والنوع (type) صفر ونرمز له بالرمز $(\sigma = 0)$ ، وهذا يعني رياضيا ان الدالة تنمو ببط مقارنة بالدالة الاسية e^{z^k} لاي $k > 1$ هذا السلوك التحليلي اللطيف well behaved هو ما يسمح باستخدامها في صياغة قوانين الفيزياء والكم ، حيث تطلب دولا لا تتباعد قيمها نحو المالانهاية (Diverge to infinity) او لا تنفجر قيمها بشكل عشوائي ,

ونموها مقيد بالعلاقة $\forall \in > 0 , \exists R_{\epsilon}; \left|\frac{1}{\Gamma z}\right| < e^{|z|^{1+\epsilon}}\ for\ |z| > R_{\in}$

حيث أن R_{ϵ} هو نصف قطر دائرة مركزها نقطة الأصل (0,0) . [9]

2 -البنية التبولوجية و توزيع الاصفار Topological structure and zero distribution :-
من منظور تبولوجي تهتم الدراسة بكيفية توزيع النقاط الحرجة (الاصفار) وبكفية ارتباطها بالفضاء والمحيط .

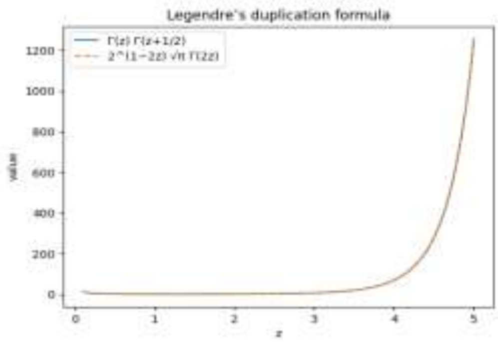
- الوصف :- تمتلك $\frac{1}{\Gamma z}$ مجموعة من الاصفار البسيطة المنفصلة (simple discrete zero) عند $z = 0, -1, -2, -3 \ldots\ldots\ldots..$

وتبولوجيا هذه النقاط لا تمتلك نقاط تراكم (Accumulation point) في المستوى المحدود ، مما يعنى أن الفضاء التبولوجي للدالة يظل منتظما (Regular) ,
ملاحظة :- لكي تكون 1- نقطة تراكم مثلا ، يجب أن تجد اصفارا آخرى للدالة تتراكم وتتقارب جدا من 1- لدرجة ان أي دائرة صغيرة حول 1- فمثلا نصف قطرها 0.1 فلن تجد داخلها اصفار غير 1- . عموما هذا يختلف جدريا عن دالة جاما Γz التي تمتلك اقطابا (poles) تجعل الفضاء متقوبا وغير متصل عند تلك النقاط . [10]

4-3.صيغة التضعيف لليجندر Legendre duplication formula :-
تعد صيغة التضعيف لليجندر حجر الزاوية حجر الزاوية في فهم التماثل الدالي جاما ، وتعرف الصيغة بالعلاقة الاتية .

$$2^{2z-1}\Gamma z\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma 2z \qquad (10)$$

من الناحية التحليلية تظهر هذه الصيغة كيف يمكن اختزال دالة جاما لضعف المتغير الى حاصل ضرب دالتين بسيطتين في التحليل الحقيقي ، وتبرز هذه الصيغة كأداة لأثبات التقعر اللوغاريتمي Logarithmic convexity ، بينما في التحليل العقدي تمثل استمرارا تحليليا يربط سلوك الدالة في مستويات مختلفة من النطاق العقدي . [11]



شكل 3 . صيغة التضعيف لليجندر

3-4-1.السلوك التحليلي

1-نطاق التعريف Domain of definition :- من الناحية التحليلية يتم تحديد نطاق الصيغة بماء على النقاط التي تكون فيها دالة جاما جيدة السلوك (well behaved) .

وصيغة ليجندر معرفة لجميع القيم المركبة $z \in \mathbb{C}$ باستثناء النقاط التي تمثل اقطابا (poles) لاي من الدوال الثلاث الموجودة في الصيغة Γz , $\Gamma(z+\frac{1}{2})$, $\Gamma 2z$.

و بذلك نطاق الصيغة تكون جميع قيم الاعداد المركبة عدا القيم التي تجعل وسيط دالة جاما عددا صحيحا غير موجب

$$z \in \mathbb{C} \backslash \{0, \frac{-1}{2}, -1, \frac{-3}{2}, -2, \frac{-5}{2}, -3, \dots\dots\}$$

ونكتب النطاق على الصورة [12]

$$D = \mathbb{C} \setminus \{\frac{-n}{2}\} \ , n = \{0,1,2,3,4, \dots\dots\}$$

2-الخصائص التبولوجية و بنية الأقطاب :-

تبولوجيا ندرس الصيغة في فضاء هوسدورف و تتميز بالخصائص التالية

- الأقطاب البسيطة simple poles :- تمتلك دالة جاما اقطابا من الرتبة الأولى فقط وتبولوجياً الصيغة تضمن ان القطب موجود في $\Gamma 2z$ عند قيمة معينة (مثلا $z = \frac{-1}{2}$) يقابله قطب في الطرف الايسر في الدالة $\Gamma(z+\frac{1}{2})$ مما يحافظ على التوازن التبولوجي للمعادلة .
- الاستمرارية والاتصال :- الصيغة متصلة وتحليلية (analytic) في كل مكان داخل نطاق تعريفها وتعتبر دالة هولومورفية في النطاق المفتوح الناتج عن استبعاد الأقطاب .[13]

3-الامتداد التحليلي Analytic continuation :- تستند الصيغة في اصلها الى تكاملات دالة بينا المحدودة $\Re e(z) > 0$ ، مع ذلك فأن السلوك التحليلي للدوال المكونة كدوال "ميرومورفية" يسمح بتجاوز ها القيد ، فأن مبدأ الامتداد التحليلي يفرض صحة الصيغة في كامل المستوى المركب ، مما يحولها من مجرد علاقة تكاملية إلى متطابقة دالية في فضاء الدوال التحليلية . [14]

4-البواقي في دالة جاما Residues of the gamma function :-

في التحليل العقدي يعتبر مفهوم البواقي (Residue) أحد الأدوات المركزية في دراسة سلوك الدوال المركبة حول نقاط التفرد المعزولة، إذا كانت $f(z)$ دالة ميرومورفية (meromorphic) أي تحليلية في منطقة ما عدا عند مجموعة من التفردات المعزولة ، فأن الباقي للدالة عند نقطة تفرد z_0 يعرف رياضيا كمعامل a_{-1} في متسلسلة لوران للدالة $f(z)$ حول z_0 .

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

حيث يمثل a_{-1} الباقي $Res(f, z_0)$ ، وهو تعريف يربط القيمة التحليلية بالبنية المحلية للدالة ، موضحا آثر كل نقطة تفرد على سلوكها العام.
الميزة الأساسية للبواقي تظهر في نظرية البواقي Residue theorem التي تنص على ان التكامل الحلقي للدالة $f(z)$ حول مسار مغلق C يمكن التعبير عنه بالقيمة $2\pi i$ مضروبة في مجموع البواقي داخل المسار .

$$\int_c \ f(z)dz = 2\pi i \sum R(f\ , z_k)$$

حيث z_k هي نقاط التفرد داخل C تعد هذه النظرية أداة قوية لتقييم التكاملات المركبة ، وتستخدم على نطاق واسع في الحسابات التحليلية و الفيزيائية .
أما بواقي دالة جاما في التحليل المركب ، فتعد دالة جاما امتدادا تحليلا لدالة المضروب الى المستوى العقدي ، فالتعريف الأول لدالة جاما قد تم تعريفه عبر تكامل اويلر الأول ، وهو معرف فقط عندما $\Re(z) > 0$ يمكن استمرار هذه الدالة إلى المستوى المركب كاملا باستثناء الاعداد الصحيحة السالبة عبر العلاقة $\Gamma(z+1) = z\Gamma z$ التي تسمح بتعريف جاما عندما $\Re(z) < 0$ باستخدام الاستمرار التحليلي في كل المستوى بحيث تكون جاما دالة ميرومورفية ماعدا اقطاب بسيطة عند الاعداد الصحيحة غير الموجبة ، وهذه الأقطاب تنتج صفر عند تطبيق صيغة التكرار مما يستلزم ان جاما غير معرفة عند تلك النقاط لتجنب القسمة على صفر .
في نظرية التحليل المركب الباقي *(Residue)* لدالة عند قطب بسيط z_0 تعرف عند النهاية

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

1-4.-حساب الرواسب *Calculating the Residu*:-

باستخدام صيغة التكرار المناسبة لصيغة جاما حول الاعداد الصحيحة السالبة ، يمكن حساب الباقي عند القطب $z_0 = -n$ حيث $n = \{0,1,2,3, \dots \dots\}$.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma z$$

بتطبيق هذه المتطابقة بشكل متكرر نربط Γz ب $\Gamma(z+n+1)$

$$\Gamma z = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2) \dots \dots (z+n)}$$

$$(z+n)\Gamma z = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2) \dots\dots (z+n+1)}$$

عند اخذ النهاية عندما تقترب z من $-n$ في الطرفين

$$Res(\Gamma\,.-n) = \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2) \dots\dots (z+n-1)}$$

البسط يؤول الى $\Gamma(-n+n+1) = \Gamma 1 = 1$
وعند أخذ النهاية للمقام نعوض عن $z = -n$ نحصل على حاصل ضرب n من الاعداد السالبة المتتالية

$$(-n)(-n+1)(-n+2) \dots \dots \dots \dots (-1) = (-1)^n n!$$

وبالتالي تكون النتيجة النهائية للراسب هي [4]

$$Res(\Gamma\,, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad (11)$$

في الجدول التالي نطبق الصيغة العامة للرواسب على بعض القيم .

قيمة الراسب Residue	التعويض في الصيغة	النقطة z
$Res(\Gamma\,, 0) = 1$	$\frac{(-1)^0}{0!}$	$z = 0$
$Res(\Gamma. -1) = -1$	$\frac{(-1)^1}{1!}$	$z = -1$
$Res(\Gamma\,, -2) = \frac{1}{2}$	$\frac{(-1)^2}{2!}$	$z = -2$
$Res(\Gamma\,, -3) = \frac{-1}{6}$	$\frac{(-1)^3}{3!}$	$z = -3$

4-2.الأهمية التحليلية والتطبيقية لرواسب دالة جاما :-

4-2-1.الامتداد التحليلي :- توفر الرواسب $\frac{(-1)^n}{n!}$ الية دقيقة لوصف سلوك دالة جاما خارج تكاملها الأصلي $\Re e(z) > 0$ ، مما يسمح بفهم أعمق لبنيتها كدالة ميرومورفية في كامل المستوى العقدي .[13]

4-2-2. تحويلات لابلاس العكسية :- لإبراز الأهمية التطبيقية للبواقي في هذا السياق نستخدم مثالا كلاسيكيا يربط بين دالة جاما وتحويل لابلاس العكسي ، او الأنظمة التي تتبع قوانين القوى .

مثال تطبيقي حساب تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s) = \frac{1}{s^\alpha}$.

في الهندسة والفيزياء نحتاج غالبا لا يجاد الدالة الزمنية $f(t)$ التي تقابل الدالة الترددية $F(s) = s^\alpha$ و α ليس شرطا ان تكون عددا صحيحا موجبا .

1-الصيغة التكاملية :- يعطي تحويل لابلاس العكسي من خلال التكامل الكنتوري في المستوى المركب

$$f(t) = L^{-1}[s^{-\alpha}] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{s^\alpha}\, ds$$

2- دور دالة جاما والرواسب :- عندما نقوم بإغلاق الكنتور في النصف الايسر من مستوى s المعقد ، تظهر لنا نقطة تفرع هو اقطاب تعتمد على قيمة α ، فإذا اعتبرنا الحالة التي تظهر فيها دالة جاما في التعريف الأساسي

$L[\, t^{\alpha-1}\,] = \frac{\Gamma\alpha}{s^\alpha}$ ومنه يكون تحويل لابلاس العكسي هو $f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}$.

3-التطبيق التحليلي للبواقي :- تتجلى روعة البواقي هنا عند التعامل مع دوال اكثر تعقيدا مثل $F(s) = \frac{e^s}{s\Gamma(1-s)}$

، ولحساب التحويل العكسي نستخدم نظرية الرواسب عند الأقطاب السالبة لدالة جاما الموجودة في المقام و بما أن الرواسب عند تلك الأقطاب $(z = -n)$ هي $\frac{(-1)^n}{n!}$ ، فأننا نحول التكامل إلى مجموع جبري

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Res(\frac{e^{st}}{s\Gamma(1-s)}\ .\, s_n)$$

هنا المجموع الجبري هو الذي يعطينا الحل النهائي في نطاق الزمن كمتسلسلة قوى تقاربية وهو ما يحول المسألة من تكامل معقد جدا في المستوى المركب الى عملية جمع بسيطة لمعاملات تعتمد على رواسب جاما .[9]

4-2-3. التقارب في السلاسل اللانهائية :- بفضل وجود المضروب $n!$ في مقام الرواسب تضمن التقارب السريع للسلاسل الناتجة عن حساب البواقي ، مما يوفر استقرارا كثيرا في النمذجة الحاسوبية والعددية للدوال الخاصة . [15]

4-2-4.الرابط التحليلي بين رواسب دالة جاما والتنظيم البعدي في ميكانيكا الكم:-

تظهر الأهمية التطبيقية التي تم حسابها رياضيا $Res(\Gamma\,, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ بشكل جلي عند تطبيق تقنية (التنظيم البعدي Dimensional Regularization) في الفيزياء النظرية ، حيث يتم حساب تكاملات فاينمان (Feynman integrals) كدالة في ابعاد الزمكان d ، وتظهر النتيجة النهائية في المعادلة $\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)$ محتوية على دالة جاما في الصيغة التالية

$$\int \frac{d^d \ell_{\mathbb{E}}}{(2\pi)^d(\ell_{\mathbb{E}}^2+\Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma 2}\ (\frac{1}{\Delta})^{2-\frac{d}{2}}$$

وهنا يبرز دور الرواسب في نقطتين محورتين :-

1-تمثيل التباعد بالأقطاب :- كما أوضحنا سابقا أن دالة جاما تمتلك اقطابا معزولة (*Isolated poles*) عند $z = 0, -1, -2, -3, \dots \dots$ عند دراسة السلوك من البعد الرابع $(d \to 4)$ فان القيمة $2 - \frac{d}{2}$ تؤول الى الصفر وهو القطب الأول لدالة جاما الذي حسبنا راسبة سابقا وكان قيمته 1.

2- استخلاص القيمة الفيزيائية عبر متسلسلة لوران :- يستخدم النص توسيع دالة جاما حول القطب

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)=\frac{2}{\epsilon}-\gamma+O(\epsilon)$$

أن الحد $\frac{2}{\epsilon}$ يمثل عمليا مساهمة الراسب عند ذلك القطب الذي قمنا بتحديده هو الذي يحدد قوة التباعد اللوغاريتمي في تكاملات الزحم حيث ان القطب $\frac{1}{\epsilon}$ في التنظيم البعدي يتوافق مع التباعد اللوغاريتمي .

الخلاصة :- إن حساب الرواسب عند الأقطاب السالبة لدالة جاما ليس مجرد تمرين رياضي ، بل هو الأداء التي تسمح في الفيزياء بفضل الأجزاء المتباعدة (الممثلة في الرواسب) عن الأجزاء المحدودة ،مما يمكن من ح الكميات القابلة للرصد *(observable quantities)* في ميكانيكا الكم .[16] .

5- تمثيل هانكل بالتكامل الكنتوري لدالة جاما *Hankek's contour integral Representation* :-

تعد دالة جاما الركيزة الأساسية لتعميم المضروب الى النطاق العددي ، فبينما يقتصر تكامل اويلر من النوع الثاني على نصف المستوى الأيمن $\Re e(z)>0$ ويتقارب فقط على هذا الجزء، بينما يظهر تمثيل هانكل التكاملي كأداة لأغني عنها لتحقيق التمديد التحليلي في كامل المستوى العقدي $\mathbb{C}$ باستثناء الأقطاب البسيطة .

5-1.تعريف مسار تكامل هانكل *the Hankel contour* :- يعرف مسار هنكل C بأنه مسار حلقي *(Loop contour)* في مستوى المتغير العقدي t ، صمم هذا المسار خصيصا لتجنب نقطة التفرع *(Branch point)* عند $t=0$.

5-2.الأجزاء المكونة للمسار :- يتألف المسار من ثلاثة أجزاء متصلة .

1- المسار العلوي (γ_1) :- يبدأ من $+\infty$ بمحاذاة المحور الحقيقي (فوق المحور بمسافة ϵ) حيث $\arg(t)=0$ أو $\arg(-t)=-\pi$.

2-النواة الدائرية (γ_3) :- دوران عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل بنصف قطر $\delta\to 0$

3-المسار السفلي (γ_2) :- عودة إلى $+\infty$ تحت المحور الحقيقي حيث $\arg(t)=2\pi$ أو $\arg(-t)=\pi$.

5-3.الشروط التبولوجية :- يعتمد التكامل على تبولوجيا المسار " أي كيفية إحاطته بالقطب " أي تغير في عدد اللفات حول نقطة الأصل ، يغير قيمة التكامل بمقدار معامل طور $e^{2\pi ik}$.[17]

5-4.التمثيلات التكاملية لهنكل :- يقدم هنكل صيغتين أساسيتين لدالة جاما ومقلوبهما وهما الأكثر استقرار في التحليل العددي.

1-صيغة مقلوب جاما:- تعتبر هذه الصيغة لدالة كاملة *(Entire function)* لإنها لا تمتلك أقطابا .

$$\frac{1}{\Gamma z}=\frac{i}{2\pi}\int_c\ (-t)^{-z}\,e^{-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\ \ s^{-z}e^{s}\ dz\quad ,\ z\in\mathbb{C}\qquad (12)$$

2-صيغة دالة جاما :-

$$\Gamma z=\frac{-1}{2isin(\pi z)}\int_c\ (-t)^{z-1}e^{-t}\ dt=\frac{1}{e^{2\pi ik}-1}\int_c\ \ t^{z-1}e^{-t}\ dt\ \ ,z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})\qquad (13)$$

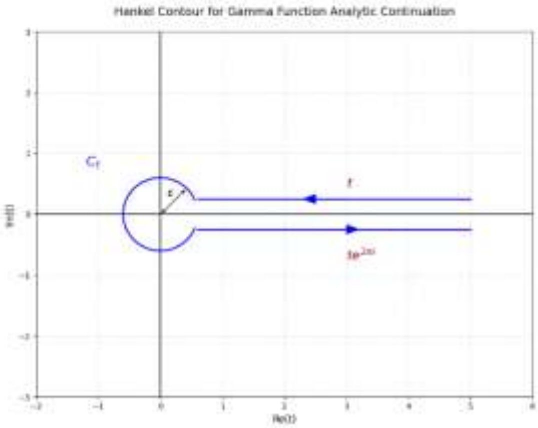
توضيح هذه الصيغة إن الأقطاب تظهر فقط عندما يكون $\sin(\pi z)=0$ ، إي عند الاعداد الصحيحة .

5-5.السلوك التحليلي والتبولوجي :- بالنسبة للأقطاب والرواسب عندما تؤول z الى عدد صحيح سالب $-m$ ينهار كنتور هانكل الى دائرة مغلقة حول نقطة الأصل بتطبيق نظرية الرواسب وفك الدالة الاسية e^{t} بمتسلسلة تايلور , نجد أن

$$Res(\Gamma\,,-m\,)=\frac{(-1)^m}{m!}$$

5-6.العلاقة بتكامل اويلر :- يعد تكامل اويلر حالة اختزالية من تكامل هانكل فعندما يكون $\Re e(z)>0$ يمكننا ضغط المسارين الشعاعيين على المحور الحقيقي ، الفرق في الطور بين المسار العلوي والسفلي ($e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}$) ينتج الحد $2isin(\pi z)$ الذي يلغي المقام صيغة هانكل مما يعيدنا الى تكامل اويلر .[10]

الخلاصة :- أن مسار هنكل يمثل تحولا جوهريا من التكامل الحقيقي المحدود الى التكامل العقدي الشامل من خلال هذا المسار ، أصبحت دالة جاما كائنا رياضيا مرنا يربط بين المتسلسلات المنفصلة (المضروب) والتحليل المستمر ، مما يجعلها الأداة الأقوى في الفيزياء الحديثة .



شكل 4. مسار تكامل هانكل الكنتوري

6-المشتقات اللوغاريتمية لدالة جاما (دالتا ديجاما و بوليجاما) :-

-: Logarithmic Derivatives of the Gamma Function: Digamma and Polygamma Functions

تعد دالة جاما من أهم الدوال الخاصة ، ولكن عند دراسة سلوكها التقاريبي ، نجد أن التعامل مع مشتقاتها المباشرة معقد ، لذا نلجأ إلى المشتقة اللوغاريتمية التي تولد لنا عائلة دوال بولجاما .

تعطى دالة ديجاما من خلال المشتقة اللوغاريتمية لدالة جاما ,

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\, log\Gamma z = \frac{(\Gamma Z)'}{\Gamma Z} \qquad (14)$$

اما المشتقة النونية $(n)^{th}$ للدالة فتسمى دالة بوليجاما (*polygama function*) ويرمز لها بالرمز $\psi_0(z)$ وغالبا ما يستخدم الرمز $\psi_0(z) = \psi(z)$ للتعبير عن دالة ديجاما نفسها .

6-1.الاشتقاق صيغة فايرشتراس :- لنبدا بصيغة فايرشتراس لدالة جاما

$$\frac{1}{\Gamma z} = [\, z\, e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}]$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$-\log[\Gamma z] = logz + \gamma z + \sum_{k=1}^{\infty}[\log\left(1 + \frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k}]$$

باشتقاق الطرفين

$$= \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+z} - \frac{1}{k})$$

ومنها نجد

$$\Gamma z' = -\Gamma z\, [\frac{1}{z} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+z} - \frac{1}{k})] = \Gamma z\, \psi(z)$$

$$\psi\,(z) = \frac{(\Gamma z)'}{\Gamma z}$$

يترتب على ما سبق النتائج التالية عندما $z = 1$ فان $\Gamma 1 = 1$

نجد قيمة المتسلسلة التلسكوبية (*Telescoping series*) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k})$ وبفك المتسلسلة

$$= \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

عندما n تقترب الى المالانهاية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)=-1$

$(\Gamma 1)' = -1.[1+\gamma-1] = -\gamma$

ملاحظة :- تسمى المشتقة الأولى لدالة ديجاما بدالة ترايجاما $\psi'(z)$(trigamma) " أو المشتقة الثانية للوغاريثم لدالة جاما " ، بمعنى أنها دالة بوليجاما عندما تكون $n=1$.[4]

6-1.الثمتيل التكاملي لدالة ديجاما

1-تمثيل جاوس التكاملي Gauss's integral Representations :-

$$\psi(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt \qquad ,\Re e(z)>0 \qquad (15)$$

يوضح هذا التكامل ان دالة ديجاما تنشأ من الفرق بين ثابت اويلر γ وسلوك النمو الاسي ، والحد الثاني يمثل الاعتماد على المتغير z .

2-تمثيل ديريشليه التكاملي *Drichlet's integral Representations*:-

$$\psi(z)=\int_0^\infty\left(e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)\frac{dt}{t} \qquad (16)$$

3-تمثيل بينيه التكاملي *Binet's integral Representation* :-

$$\psi(z)=lnz-\frac{1}{2z}-2\int_0^\infty\frac{t\,dt}{(t^2+z^2)(e^{2\pi t}+1)} \qquad (17)$$

هذا التكامل هو الأساس الذي يشتق منه السلوك التقاربي *Asympltotic Expansion* [19]

6-2.السلوك التبولوجي *Topological behavior* :-

1-المجال *domain* :- مجال التعريف هو الفضاء المفتوح $D=\mathbb{C}\setminus\{0 ، -1 ، -2 ، -3 ، \ldots\}$ من الناحية التبولوجية هذا الفضاء غير مرتبط بسبب الثقوب الناتجة من الأقطاب .

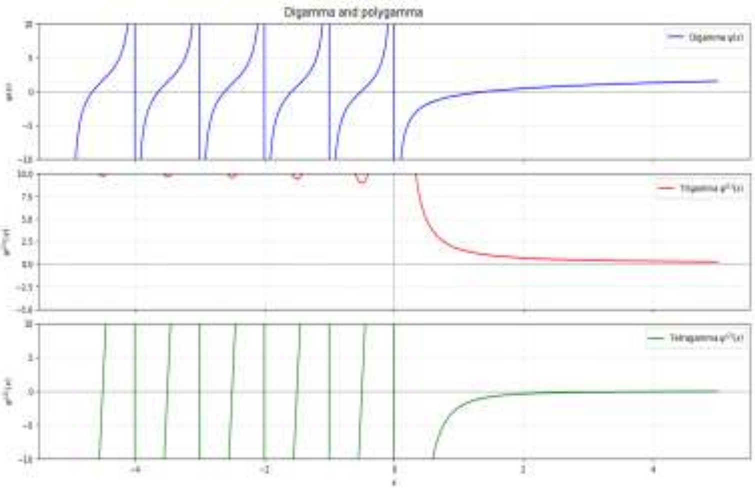
2-الرتابة والتحدب :- على المحور الحقيقي الموجب $(0,\infty)$ تعتبر دالة ديجاما $\psi(z)$ هي دالة تزايديه رتيبة وتقابليه (*bijective*) من $(0,\infty)$ الى $\mathbb{R}$ ، اما دالة ترايجاما $(\psi(z))'$ موجبة دائما ومحدبة مما يضمن التحدب اللوغاريتمي لدالة جاما (مبرهنة بور – مولروب) .

3-الاستمرارية :- الدوال مستمرة وقابلة للاشتقاق لعدد لانهائي من المرات في متسلسلات هو تقارب منتظم على المجموعات المتراصة *compact sets* .[19]

6-3.السلوك التحليلي (*Analytic behavior*) :-

1-الأقطاب (*poles*) :- تعد هذه الدوال مرومورفية وتمتلك اقطابا بسيطة... $z=0,-1,-2,-3,\ldots$ براسب ثابت قدره -1 عند كل قطب .

2-السلوك التقاريبي :- عند القيم الكبيرة ل z تنمو دالة ديجاما لوغاريتميا $\psi(z)\sim lnz$ بينما تؤول جميع دوال بوليجاما $\psi^n(z)$ الى الصفر [17].



شكل 5. عائلة بوليجاما (ديجاما وترابجاما)

7-التوسعات التقاربية *Asymptotic expansion* :- كما عرفنا في التعريف الأول تكامل اويلر لدالة جاما والتي تعد جاما من اكثر الدوال الخاصة أهمية في الرياضيات والفيزياء ، وعلى الرغم من وضوح هذا التعريف التكاملي إلا ان التعامل معه يصبح معقدا وصعبا من الناحية العددية والتحليلية عندما تؤول قيمة $|z|$ الى مالانهاية ومن هنا تبرز الحاجة الماسة الى التوسعات التقاربية (*Asymptotic Expansion*) وتحديدا التوسعات من نوع بوانكاريه (*Poincare - type*) .

7-1.لماذا نلجأ الى التوسع التقاريبي :- يعد التوسع التقاريبي وسيلة رياضية قوية لوصف السلوك الديناميكي للدالة عند القيم الكبيرة ، حيث يعمل على تحويل التكاملات المعقدة والنمو الاسي الضخم الى متسلسلات قوى يسهل التعامل معها ، وتتجلى أهمية هذا التوسع في الآتي :-

1-الكفاءة العددية :- حساب القيم الكبيرة لدالة جاما مباشرة قد يودي الى أخطاء في الفيض الحسابي (*overflow*) بينما توفر الصيغ التقاربية دقة عالية بجهد حسابي أقل .

2-تبسيط النماذج :- تسمح هذه الحسابات باستبدال الدالة التكاملية بصيغ جبرية واسية واضحة ، كما هو في صيغة ستيرلينج (*stirling's formula*) سلوك الدالة عند المالانهاية .[20]

وهناك العديد من الصيغ ومن أهمها :-

7-2.صيغة سترالنج *Stiriling formula* :- هي الصيغة الأكثر شهرة وتصف السلوك الرئيسي للدالة عند المالانهاية

$$\Gamma(z+1) = z! \approx \sqrt{2\pi z}\ z^z e^{-z} \qquad (18)$$

7-3.التوسع التقريبي من بوانكاريه للوغاريتم دالة جاما *Poincare-typy asymptotic expansion* :-

بسبب النمو الهائل للدالة نستخدم اللوغاريتم لتبسيط الحسابات .

$$ln\Gamma z \sim \left(z-\frac{1}{2}\right) lnz - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2K}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} \qquad (19)$$

الحدود الأولى تمثل التقريب الخطي واللوغاريتمي .

B_{2K} أعداد بيرنولي وهي ثوابت رياضية تظهر في نظرية الاعداد وتعمل هنا كمعاملات لتصحيح الخطأ .

7-4.التوسع التقاريبي المباشر لدالة جاما نفسها The asymptotic expansion of the Gamma function itself -:

$$\Gamma z \sim e^{-z} z^z \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{g_k}{z^k}\right) \qquad (20)$$

وهذه الصيغة تسمى تقريب سترالنج *Stirling's Approximation,*

$$\Gamma z \sim e^{-z} z^z \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 + \frac{g_1}{z} + \frac{g_2}{z^2} + \frac{g_3}{z^3} + \frac{g_4}{z^4} \dots\dots\right)$$

حيث أن $g_1 = \frac{1}{12}$, $g_2 = \frac{1}{288}$, $g_3 = \frac{-139}{51840}$, $g_4 = \frac{-571}{2488320}$, $g_5 = \frac{5246819}{209018880}$

وبذلك تكتب المتسلسلة على الصورة

$$\Gamma z = e^{-z} z^{z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\ \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z} - \frac{139}{51840z} - \frac{571}{2488320z} + \cdots\right)$$

هذا التوسع يعطي قيمة دالة جاما كحاصل ضرب القيمة الأساسية في متسلسلة قوى $\frac{1}{z}$.

نستخدم الصيغة لحساب $\Gamma 10$

$$\Gamma 10 \sim e^{-10} 10^{10} \sqrt{\frac{2\pi}{10}} \left(1 + \frac{1}{120} + \frac{1}{28800} - \frac{139}{518401000} + \cdots\right) \approx 359869563 \times 1.00836537345$$

$$\approx 362880.0063$$

القيمة الحقيقة $\Gamma 10 = 9! = 362880$

وعند حساب الخطأ :- الخطأ المطلق $|362880{,}0063 - 362880| \approx 0{,}0063$

الخطأ النسبي $\left[\frac{0{,}0063}{362800}\right] \approx 1.74 \times 10^{-8} = 0{,}00000174$

ملاحظة:- باستخدام حدود أكثر من المتسلسلة يقل الخطأ أكثر و لكن حتى مع الحدود الثلاثة يكون التقريب دقيقا .

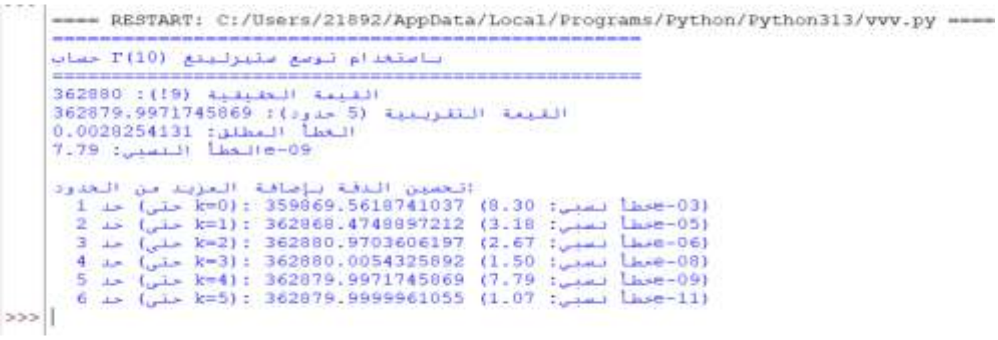
7-5.التوسع التقاربيي لدالة ديجاما Asymptotic expansion of the digamma function:-

$$\psi(z) = \frac{(\Gamma z)'}{\Gamma z} \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k\, z^{2k}} \qquad (21)$$

تفيد هذه الصيغة في تبسيط التكاملات التي تحتوي على مشتقات دالة جاما .

7-6.الوصف التحليلي :- تعتمد هذه على شرط تبولوجي في المستوى المركب .

القطاع *The sector*:- $|\boldsymbol{argz}| < \pi$ ، وهذا يعنى أن الصيغة صالحة في كل مكان ما عدا المحور الحقيقي السالب لان دالة جاما تحتوى على اقطاب عند الاعداد الصحيحة السالبة حيث تذهب القيم الى مالانهاية بشكل متذبذب .[18]



برنامج بلغة البايثون *Python* لإيجاد $\Gamma 10$ بواسطة تقريب سترلينج

النتائج والخلاصة :- ***Results and conclusion***

1- دالة جاما ليست مجرد تعميم للمضروب ، بل هي كائن رياضي ميرومورفي يربط بين التكاملات المعتلة والمتسلسلات اللانهائية .

2- اثبتت مبرهنة بوهر-مولروب ان المحدبية اللوغاريتمية هي الخصاصية التبولوجية التي تضمن وحدانية الامتداد التحليلي للمضروب .

3- التوسعات التقاربية (ستيرلينج وبوانكاريه) توفر الحل الأمثل للمعضلات الحسابية في القيم الكبيرة .

التوصيات :- توصي الدراسة الباحثين في مجالات الفيزياء النظرية والاحصاء بتبني مكتبات البرمجة المتقدمة التي تعتمد على التوسعات التقاربية الرياضية ، لضمان دقة النتائج في النمذجة الرياضية والأنظمة التي تتطلب حسابات في نطاقات لانهائية .

Compliance with ethical standards

Disclosure of conflict of interest

The author(s) declare that they have no conflict of interest.

References

[1] BARRETT, A. J. “Special Functions of Mathematics for Engineers”–Second edition, LC Andrews, Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP, UK. 1998. 480pp. Illustrated.£ 50. The Aeronautical Journal, 1998, 102.1018: 438-438. pp 61-62

[2] BELL, William Wallace. “Special Functions for Scientists and Engineers. London”: D. Van Nostrand Company 1968. ISBN 978-0-442-01874-4.pp .20-23

[3] Havil, Julian. “Gamma: Exploring Euler’s Constant”. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003pp53-57

[4] Bonnar, James. “The Gamma Function”. Treasure Trove of Mathematics. February 2017.pp.69-72

[5] L. C. Andrews, “Field Guide to Special Functions for Engineers”, vol. FG18. Bellingham, WA, USA: SPIE Press, 2011,p.21. pp103-108

[6] ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J.; HARRIS, Frank E. “Mathematical methods for physicists”: a comprehensive guide. Academic press, 2011.p.600 .

[7] Yu, Jeffery. “Gamma and Beta Integrals”. May 30, 2020 .p.4

[8] Conway, John B. “Functions of one complex variable II”. Springer Science & Business Media, 2012. pp 175-176

[9] BROWN, James Ward, et al. ‘’Complex variables and applications’’. New York: McGraw-Hill, 1996.pp.138-145 & pp.298-301

[10] REMMERT, Reinhold.‘’Classical topics in complex function theory’’. Springer Science & Business Media, 1997.pp 38-39 & pp 49-55

[11] ANDREWS, George E., et al. Special functions. Cambridge: Cambridge university press, 1999.p.22

[12] ABRAMOWITZ, Milton; STEGUN, Irene A. “Handbook of mathematical functions”: with formulas, graphs, and mathematical tables. Courier Corporation, 1965. p,255

[13] STEIN, Elias M.; SHAKARCHI, Rami. “Complex analysis”. Princeton University Press, 2010.pp.161-162

[14] AHLFORS, Lars Valerian. Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. New York: McGraw-Hill, 1960.pp.199-200

[15] TEMME, Nico M. Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics. John Wiley & Sons, 1996.pp.43-44.

[16] PESKIN, Michael E. “An Introduction to quantum field theory”. CRC press, 2018 .pp.249-251

[17] WHITTAKER, Edmund Taylor; WATSON, George Neville. “A course of modern analysis”. Courier Dover Publications, 2020.pp 253-254 &pp.241-250

[18] Frank, WJ Olver, ed.” NIST handbook of mathematical functions”. Cambridge university press, 2010.p,140.

[19] Artin, Emil. “The Gamma Function”. Translated by Michael Butler. Athena Series: Selected Topics in Mathematics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.pp.16-19.

[20] Olver F. Asymptotics and special functions. AK Peters/CRC Press; 1997.pp.87-88.

